

ALCUNI CENNI SULLE SOLUZIONI AVANZATE IN GEOTECNICA. MODELLAZIONI FEM E FDM

Dr. Ing. Angelo Silvio Rabuffetti (info@terrain.it)
 Libero professionista Studio Terrain Milano.

ABSTRACT - Senza pretesa di completezza, questa memoria approfondisce in particolare alcune caratteristiche dei metodi FEM e FDM affinché sia meglio compresa la portata delle soluzioni offerte, con un impegno di risorse progettuali del tutto paragonabile, in certi casi, ai metodi tradizionali. Per chiarire i diversi tipi di approccio, vengono dapprima focalizzati gli algoritmi di calcolo, quindi si paragonano due tipiche soluzioni di moto di filtrazione di falda.

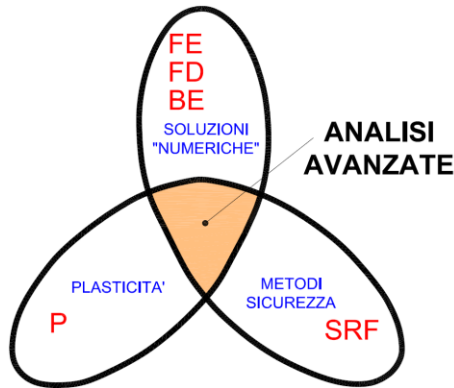
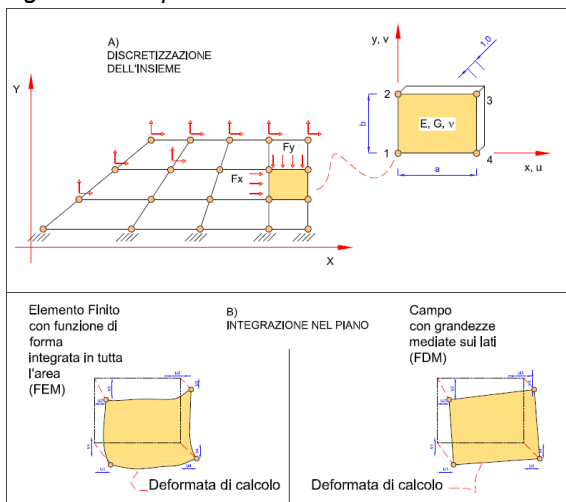


Figura 1 – Tipiche componenti del calcolo geotecnico avanzato (Rabuffetti – 2013)

Figura 2 – Aspetti delle differenti discretizzazioni



Le moderne analisi numeriche risultano da un intreccio di tre componenti fondamentali (Fig. 1): un'analisi dello stato tensionale/deformativo, un criterio di collasso nell'ambito dell'applicazione di una teoria della plasticità, un metodo per la definizione della sicurezza.

Le analisi FEM e FDM differiscono innanzitutto per il modo in cui viene determinata la distribuzione delle tensioni/deformazioni nel terreno. Entrambi i metodi si basano su una discretizzazione del terreno in un numero arbitrariamente definito di campi di integrazione (Fig. 2, a), la differenza consiste nella mera formulazione analitica del problema. Entrambi gli algoritmi giungono a formulare un sistema risolvibile composto da equazioni riferite ai nodi del sistema. Il numero delle equazioni dipende essenzialmente dal numero dei nodi e dai gradi di libertà. Per esempio, i gradi di libertà nel piano sono due: spostamenti in direzione X e Y (nei metodi FEM) oppure velocità coordinate nelle due direzioni V_X e V_Y (metodi FDM).

Gli algoritmi risolutivi divergono (Fig. 2,B) in quanto:

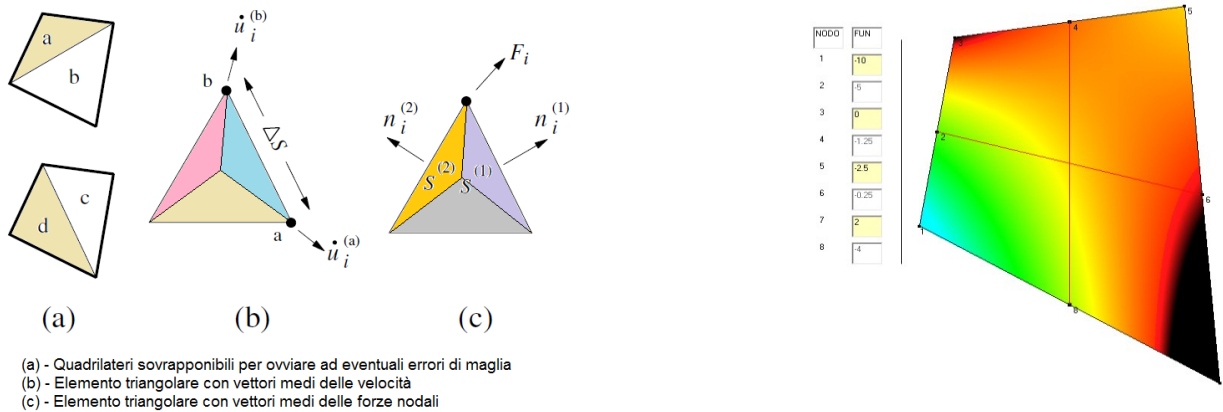
- i metodi FEM perseguono soluzioni scure da semplificazioni, basandosi su un approccio letteralmente puntuale, che porta alla definizione dei parametri desiderati (spostamenti, sollecitazioni) con continuità nel dominio dello spazio. In tale modo, il sistema di equazioni risolutive comporta l'integrazione "esatta" di un sistema alle derivate parziali spaziali, utilizzando le leggi della meccanica classica. Le equazioni che compongono il sistema coinvolgono la *matrice delle rigidità* del sistema e mediante le *funzioni di forma* si definisce virtualmente il comportamento di ogni punto. I risultati dell'analisi sono immediatamente fruibili in termini di *comportamento* (sforzi / deformazioni)

- i metodi FDM ammettono delle discretizzazioni basate su valori medi di spostamenti e sollecitazioni, per cui il sistema risolutivo, per non perdere di rigore, viene impostato considerando l'equilibrio mediante la *seconda legge della dinamica* ($F = m \times a$). In tale sistema è necessaria un'integrazione nel dominio del tempo di accelerazioni e velocità per arrivare alla definizione degli spostamenti, integrazione nei fatti non sempre agevole.

Le strategie risolutive del problema tensionale dei due algoritmi sono esemplificabili come segue.

Per la definizione di quanto accade all'interno di ciascun elemento finito, i metodi FDM determinano le medie dei valori significativi lungo i bordi dell'elemento stesso. Per maggior precisione, ciascun elemento può essere a propria volta diviso in due sottoelementi triangolari, che servono a determinare meglio i parametri numerici e ovviare a distorsioni di maglia (Fig. 3,1). Le grandezze calcolate assumono tutte lo stesso valore (colore) lungo i percorsi (lati) di integrazione. La determinazione algoritmica dei valori medi è veloce e ragionevolmente approssimata.

I metodi FEM determinano invece una mappatura continua delle grandezze mediante le *funzioni di forma*, e utilizzano complessi metodi di integrazione con il metodo di Galerkin per determinare i coefficienti numerici del sistema risolvibile. Ogni grandezza assume un preciso valore (colore) in base alla propria localizzazione nel campo di integrazione (Fig. 3.2). Il metodo è estremamente preciso ma anche complesso e relativamente lento nell'implementazione.



(a) - Quadrilateri sovrapponibili per ovviare ad eventuali errori di maglia
 (b) - Elemento triangolare con vettori medi delle velocità
 (c) - Elemento triangolare con vettori medi delle forze nodali

Figura 3 – A) Elemento FDM – Valori medi integrati in ΔS (modificato – da FLAC) B) – Elemento FEM. Applicazione di funzioni di forma (modificato – da Rabuffetti - 2013)

Ovviamente il tipo di algoritmo, con grandezze discrete e mediate, oppure con integrazione esatta, incide sulla velocità di elaborazione. I sistemi risolvitori vengono assemblati in entrambi i metodi scrivendo una o più equazioni riferite ai nodi del sistema. Nel problema bidimensionale di Fig. 2, per esempio, per ciascun nodo si scrivono due equazioni, una in direzione X e una in direzione Y. Nei metodi FEM si tratta di equazioni di congruenza, nei metodi FDM di equilibri di forze. Perciò i sistemi risolvitori vengono processati per trovare le forze (FDM) o gli spostamenti (FEM) ai nodi.

Alcune caratteristiche dei due algoritmi numerici sono riferite nelle Figg. 4 e 5. Negli algoritmi FDM l'utilizzo della seconda legge della dinamica comporta l'esplicita valutazione della *velocità lineare* $\dot{u} = dx/dt$, valutata nelle sue componenti nelle direzioni X_i (nel caso piano $X_1 = x$ e $X_2 = y$), e della *velocità di taglio* derivata $\dot{\epsilon}$. Le leggi costitutive, ovvero le relazioni che legano sforzi e deformazioni, vengono scritte in maniera più o meno diretta, anche se approssimata, e sono modificabili abbastanza rapidamente nel corso dell'elaborazione. Leggi complesse come la Cam-Clay o altri modelli avanzati sono implementabili sfruttando la velocità di elaborazione.

| | |
|--|---|
| SISTEMA RISOLVENTE | |
| $m \frac{d\dot{u}}{dt} = F$ | ρ = densità di massa |
| $\rho \frac{\partial \dot{u}_i}{\partial t} = \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + \rho g_i$ | t = tempo |
| $\dot{\epsilon}_{ij} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial \dot{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \dot{u}_j}{\partial x_i} \right]$ | x_i = componente di spostamento in una direzione coordinata |
| $\sigma_{ij} := \sigma_{ij} + \left\{ \delta_{ij} \left(K - \frac{2}{3} G \right) \dot{\epsilon}_{kk} + 2G \dot{\epsilon}_{ij} \right\} \Delta t$ | g_i = componenti dell'accelerazione di gravità |
| $\dot{u} = \frac{dx}{dt}$ | σ_{ij} = componente del tensore degli stress |
| | LEGGE COSTITUTIVA |
| | δ_{ij} = delta di Kronecker |
| | Δt = intervallo di tempo |
| | G, K = modulo lineare e di taglio |

Figura 4 (modificato - da FLAC) – Aspetti del calcolo FDM

Gli algoritmi FEM seguono una strada più complessa, che comporta l'integrazione delle funzioni di forma mediante galerkizzazione fino alla definizione delle matrici di rigidezza k di ciascun elemento. In pratica, le matrici delle rigidezze dei singoli elementi, scritte in forma di equazioni ai nodi, vengono assemblate nel sistema matriciale risolvente $KM * r = F$ (Fig. 5). Il sistema viene risolto nei metodi FEM ottenendo degli spostamenti ai nodi, traducibili in deformazioni e quindi, tramite l'inverso delle matrici delle rigidezze, in sforzi. L'applicazione delle funzioni di forma (Fig. 3, 1) permette di ricostruire sforzi e deformazioni in qualsiasi punto del sistema.

A fronte di una minor definizione nella costruzione del sistema risolvente, i metodi FDM permettono di variare agevolmente i valori elaborati con le leggi costitutive. La velocità di elaborazione della scrittura diretta, utilizzando valori medi, è tale che tutto si svolge in frazioni di secondo. Nelle applicazioni FEM è possibile fare altrettanto impiegando tempi sensibilmente maggiori, perchè la costruzione delle matrici delle rigidezze e l'assemblaggio del sistema risolvente può richiedere da pochi secondi ad alcuni minuti di calcolo, a seconda della mesh generata, anche con elaboratori molto performanti.

La risoluzione di un problema viscoplastico, tipico delle analisi geotecniche, richiede obbligatoriamente la reiterazione della soluzione del sistema algebrico alcune centinaia di volte. Ciò è

necessario perchè gli algoritmi di calcolo in campo viscoplastico simulano la redistribuzione di sollecitazioni a partire dalle superfici di collasso per taglio verso gli elementi circostanti. Ogni volta che lo stato di sollecitazione eccede il criterio di collasso (p. es. quello di Mohr-Coulomb) si avvia una redistribuzione e un nuovo ciclo di calcolo. L'equilibrio ovvero la congruenza vengono raggiunti per convergenza dei risultati dopo un numero sufficientemente alto di reiterazioni del sistema risolvete, per l'appunto nell'ordine di alcune centinaia.

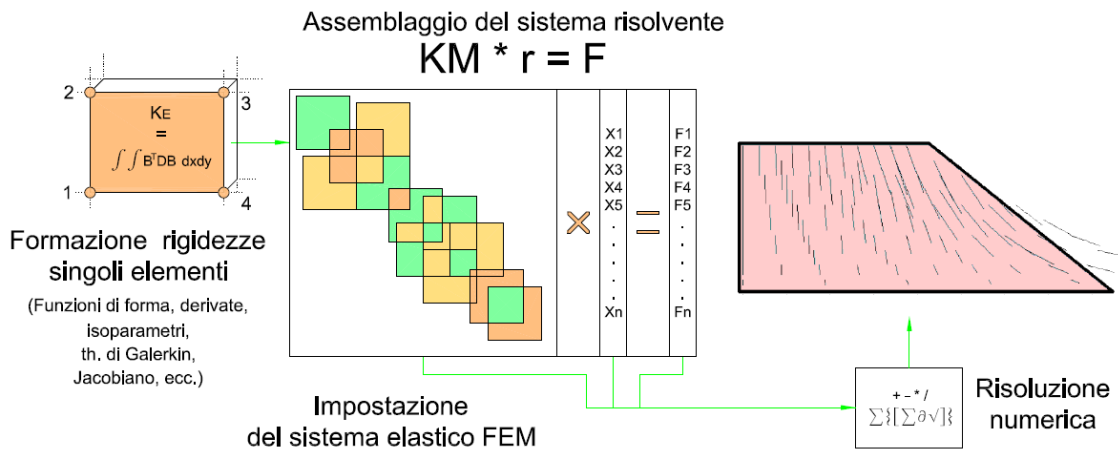
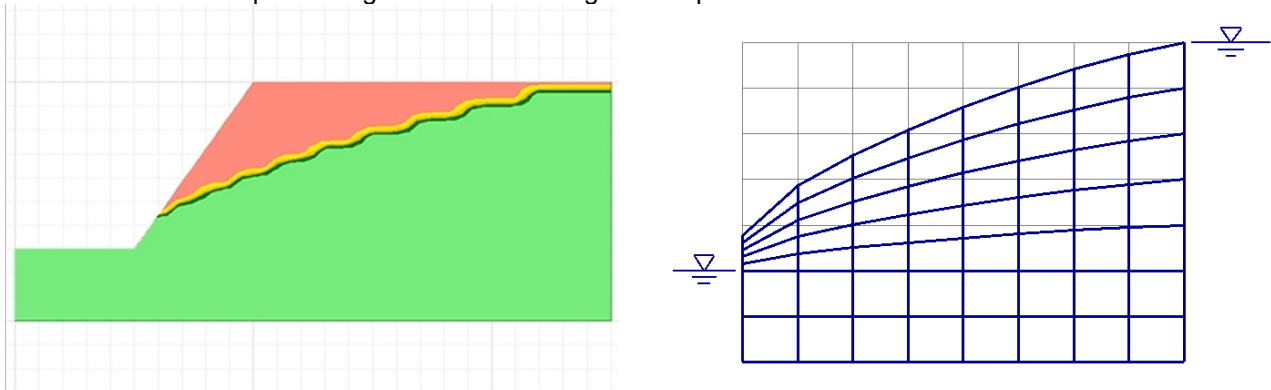


Figura 5 – Diagramma di flusso di una soluzione FEM

I risultati del calcolo riflettono la complessità di processamento dei dati. Per rendere evidente il risultato delle differenti discretizzazioni si considera un problema di moti di filtrazione. La verifica di un solo parametro (il potenziale idraulico, valore scalare) semplifica il problema 2D e permette di cogliere le differenze nelle elaborazioni.

Nella seguente Fig. 6 sono rappresentate due soluzioni di tipo idraulico ottenute con metodi FDM e FEM. Il problema consiste nello studio di un moto di filtrazione idrica da monte verso valle attraverso un corpo permeabile. In entrambi gli esempi l'input è costituito dalla geometria del problema, dalla posizione della falda a monte, dal coefficiente di permeabilità supposto costante del terreno. Il metodo FDM, che si avvale di una discretizzazione per punti di valori medi integrati lungo dei lati di dimensione sensibile, approssima la superficie freatica in una spezzata. Il metodo FEM fornisce valori continui, con linee equipotenziali a decrescere. In entrambi i casi è possibile ricavare la portata di acqua che passa da monte a valle nell'unità di tempo. Analoghi risultati si ottengono nei problemi tenso/deformativi.



A) – Modellazione FDM

B) – Modellazione FEM

Figura 6 – Risoluzioni di problematiche di potenziale idraulico

Bibliografia essenziale:

- AA. VV. (1992) – Applicazione del calcolo automatico in Ingegneria Geotecnica – Politecnico di Milano – Programma di istruzione permanente 1991 – 1992
- AA. VV. – FLAC – Fast Lagrangian Analysis of Continua – Itasca Consultig Group - Minneapolis
- R. Lancellotta (1987) – Geotecnica – Zanichelli Bologna
- T.W. Lambe – R.W. Whitman (1979) – Soil Mechanics SI Version – Wiley
- I. M. Smith – D.V. Griffiths (1988 - 2004) - Programming the Finite Element Method– Wiley
- A. S. Rabuffetti (2013) -L'analisi agli elementi finiti nei problemi geotecnici – Maggioli Editori
- G. Toniolo – P. G. Malerba (1981) - Metodi di discretizzazione dell'analisi strutturale - Masson Italia
- O. C. Zienkiewicz – R. L. Taylor (1991) - The Finite Element Method, Vol. 2, solid and fluid mechanics, dynamics and non-linearity – Mc Graw Hill Int. Ed.