

## Analisi pushover per edifici in muratura

Ing. Michele Vinci – Analista STACEC

L'obiettivo del documento è quello di riportare quali sono i parametri che entrano in gioco nell'analisi e come intervenire su di essi nei casi in cui si vuole migliorare l'esito della verifica. Tale documento nasce dalla constatazione che spesso consolidando la struttura, si ottengono risultati peggiorativi, circostanza anomala e paradossale per molti tecnici.

L'analisi statica non lineare, secondo le prescrizioni del D.M. 14/01/2008 e della Circolare 617/2009, si articola nei seguenti passi:

- Individuazione delle parti resistenti della struttura muraria attraverso la definizione del telaio equivalente (maschi murari, fasce di piano e conci rigidi);
- Calcolo delle curve di capacità per tutte le combinazioni di carico del sistema reale a più gradi di libertà (MDOF);
- Trasformazione del sistema a più gradi di libertà (MDOF) in quello ad un solo grado di libertà equivalente (SDOF) attraverso il coefficiente di partecipazione  $\Gamma$ ;
- Valutazione del sistema bilineare equivalente (SBE) di massa  $m^*$ , rigidezza  $k^*$  e periodo  $T^*$ ;
- Calcolo della capacità di spostamento ( $u_{max}$ );
- Calcolo della domanda di spostamento ( $d_{max}$ );
- Confronto tra capacità di spostamento e domanda di spostamento.

L'esito della verifica si considera positivo quando è soddisfatta la seguente relazione:

$$u_{max} \geq d_{max}$$

In altre parole, in termini di coefficienti di sicurezza ( $s$ ), affinché l'esito della verifica sia positivo, deve essere soddisfatta la (1) per tutte le combinazioni di carico effettuate:

$$s = \frac{u_{max}}{d_{max}} \geq 1 \quad (1)$$

Per aumentare il coefficiente di sicurezza occorre che aumenti la capacità di spostamento ( $u_{max}$ ) e che diminuisca la domanda di spostamento ( $d_{max}$ ). Oltre a quanto sopra detto, affinché l'esito della verifica sia positivo, il fattore di struttura  $q^*$  deve assumere valore minore di 3 (vedi relazione (11) – punto 7.8.1.6 del D.M 14/01/2008).

### 1.1 – Riduzione della domanda di spostamento $d_{max}$

Come accennato sopra, attraverso la (1), si deduce che l'esito dell'analisi migliora se si riduce la domanda di spostamento ( $d_{max}$ ) data dalla relazione (2):

$$d_{max} = \Gamma \cdot d_{max}^* \quad (2)$$

dove  $\Gamma$  è il coefficiente di partecipazione (trasforma il sistema MDOF in quello SDOF). A sua volta, la domanda di spostamento ( $d_{max}^*$ ) del sistema ad un solo grado di libertà (SDOF) si ottiene dalle relazioni (3) in funzione del periodo  $T^*$  del sistema equivalente e del periodo  $T_C$  che definisce lo spettro elastico:

$$d_{max}^* = d_{e,max}^* = S_{De}(T^*) \quad \text{se } T^* \geq T_C \quad (3.a)$$

$$d_{max}^* = \frac{S_{De}(T^*)}{q^*} \left[ 1 + (q^* - 1) \cdot \frac{T_C}{T^*} \right] \geq S_{De}(T^*) \quad \text{se } T^* < T_C \quad (3.b)$$

#### 1.1.1 – Caso in cui il periodo del sistema equivalente $T^*$ è maggiore di $T_C$

In questo caso (molto raro per edifici in muratura) la domanda di spostamento si ottiene dalla (3.a) ed è funzione dello spettro elastico in termini di spostamento:

$$S_{De}(T^*) = S_e(T^*) \cdot \left(\frac{T^*}{2\pi}\right)^2 \quad (4)$$

Poiché, per ipotesi  $T^* \geq T_C$ , lo spettro elastico è dato dalla seguente (vedi punto 3.2.3 del D.M. 14/01/2008):

$$S_e(T) = a_g \cdot S \cdot \eta \cdot F_0 \left(\frac{T_C}{T}\right) \quad T_C \leq T^* < T_D \quad (5)$$

Sostituendo la (5) nella (4) e semplificando si ottiene:

$$d_{max}^* = S_{De}(T^*) = a_g \cdot S \cdot \eta \cdot F_0 \left(\frac{T^* \cdot T_C}{4 \cdot \pi^2}\right) \quad (6)$$

Dalla (6) si evince che la domanda di spostamento ( $d_{max}^*$ ) aumenta all'aumentare del periodo  $T^*$ . Per la (1), per migliorare l'esito della verifica occorre far diminuire  $d_{max}$ , quindi  $d_{max}^*$  (per la relazione (2)) e quindi di conseguenza il periodo  $T^*$  (per la relazione (6)) che a sua volta si ottiene dalla (7):

$$T^* = 2\pi \sqrt{\frac{m^*}{k^*}} \quad (7)$$

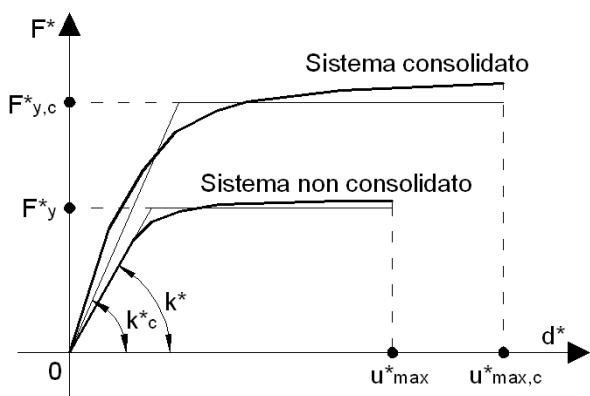


Figura 1 – Curve di capacità con e senza interventi

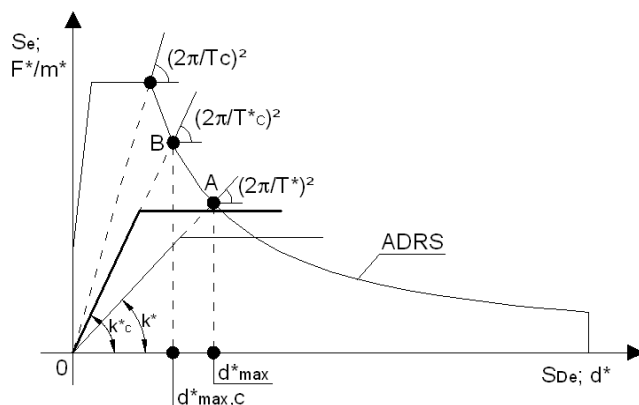


Figura 2 – Domanda di spostamento dei due sistemi (consolidato e non consolidato)

Dalla (7) si deduce che il periodo diminuisce al diminuire della massa partecipante ( $m^*$ ) ed all'aumentare della rigidezza ( $k^*$ ). Ovviamente, l'unica strada percorribile è quella di far aumentare la rigidezza (il metodo prevede valori alti della massa partecipante del primo modo). La rigidezza si ottiene dalla pendenza del tratto lineare del sistema equivalente. Tanto più è grande l'angolo  $k^*$  (vedi figura 1), tanto maggiore è la rigidezza, per cui, l'obiettivo è quello di consolidare la struttura in maniera tale che la curva di capacità assuma forma simile a quella riportata in figura (sistema consolidato). La rigidezza  $k^*_c$  del sistema consolidato, essendo maggiore della rigidezza  $k^*$  del sistema non consolidato, per quanto visto in precedenza, porta ad una riduzione della domanda di spostamento (vedi relazioni (6) e (7)) e quindi ad un incremento del coefficiente  $s$  (vedi relazione (1)).

Nel caso del sistema non consolidato (rigidezza  $k^*$ ), la continuazione del tratto lineare del sistema equivalente (tratto 0-A in figura 2) interseca la curva ADRS nel punto A, restituendo una capacità di spostamento pari a  $d^*_{max}$ , mentre nel caso consolidato (curva in grassetto con rigidezza  $k^*_c$ , con  $k^*_c > k^*$ ) il tratto lineare del sistema interseca la curva ADRS nel punto B, restituendo una capacità di spostamento pari a  $d^*_{max,c}$ , minore del caso non consolidato.

Modi per incrementare la rigidezza del sistema possono essere quelli di consolidare con intonaco armato, con iniezioni di malta, cerchiando fori, realizzando muri aggiuntivi di nuova costruzione, ecc.

### 1.1.2 – Caso in cui il periodo del sistema equivalente $T^*$ è compreso tra $T_B$ e $T_C$

In questo caso la domanda di spostamento si ottiene dalla (3.b). Poiché dipende da  $S_{De}(T^*)$ , valgono le stesse considerazioni viste nel punto 1.1.1, per cui l'incremento di rigidità determina una riduzione della domanda di spostamento ( $d_{max}$ ).

Inoltre, dipende anche dalle seguenti quantità:

- $q^*$  (fattore di struttura);
- $T^*$  (periodo del sistema bilineare equivalente).

Poiché, per ipotesi  $T_B \leq T^* < T_C$ , lo spettro elastico è dato dalla seguente (vedi punto 3.2.3 del D.M. 14/01/2008):

$$S_e(T) = a_g \cdot S \cdot \eta \cdot F_0 \quad T_B \leq T^* < T_C \quad (8)$$

Sostituendo la (8) nella (4) si ottiene:

$$S_{De}(T^*) = a_g \cdot S \cdot \eta \cdot F_0 \left( \frac{T^*}{2 \cdot \pi} \right)^2 \quad (9)$$

Come nel caso precedente, diminuendo il periodo  $T^*$  si riduce anche la domanda di spostamento.

Nella relazione (3.b), compare anche il fattore di struttura  $q^*$ . La suddetta relazione può essere scritta come segue:

$$d_{max}^* = S_{De}(T^*) \left[ \frac{T_C}{T^*} + \left( 1 - \frac{T_C}{T^*} \right) \frac{1}{q^*} \right] \quad (10)$$

A parità delle altre grandezze, dalla precedente si evince che la domanda di spostamento diminuisce (e quindi migliora l'esito della verifica) al diminuire del fattore di struttura  $q^*$  (da tenere presente che la quantità tra parentesi tonda della relazione (10) è minore di 0). Il fattore di struttura, è dato dalla seguente relazione:

$$q^* = \frac{S_e(T^*)}{\frac{F_y^*}{m^*}} \quad (11)$$

Poiché per la (8)  $S_e(T^*)$  è costante, il fattore di struttura  $q^*$  diminuisce al diminuire della massa  $m^*$  ed all'aumentare della forza massima del sistema bilineare equivalente  $F_y^*$ . Ovviamente, anche in questo caso, l'unica strada percorribile è quella di far aumentare la forza massima  $F_y^*$  (il metodo prevede valori alti della massa partecipante del primo modo). Per aumentare il valore di  $F_y^*$  occorre incrementare il valore del tagliante alla base (occorre incrementare le ordinate della curva di capacità). Per esempio, la curva consolidata riportata in figura 1 può portare ad un miglioramento dell'esito della verifica in quanto si ha  $F_{y,c}^* > F_y^*$  (si vuole ricordare che il fattore di struttura deve essere inferiore a 3 affinché l'esito della verifica sia positivo. Nel caso in cui è inferiore ad 1, non entra in gioco nella valutazione di  $d_{max}^*$ ).

Per incrementare le ordinate della curva di capacità occorre incrementare la resistenza dei singoli elementi, consolidando per esempio con intonaco armato, iniezioni di malta, FRP, ecc.

Nel caso in cui si fa variare il periodo  $T^*$  e si mantengono costanti le altre quantità, tenendo conto della (9) e della (10) si ottiene la seguente relazione:

$$d_{max}^* = \frac{a_g \cdot S \cdot \eta \cdot F_0}{4 \cdot \pi^2 \cdot q^*} \left[ (T^*)^2 + (q^* - 1) \cdot T_C \cdot T^* \right] \quad (12)$$

dalla quale si deduce che la domanda di spostamento diminuisce al diminuire del periodo  $T^*$  e quindi all'aumentare della rigidità  $k^*$  (vedi punto 1.1.1).

## 1.2 – Incremento della capacità di spostamento $u_{max}$

Dalla relazione (1) si deduce che l'esito della verifica migliora all'aumentare del numeratore del secondo membro, quindi all'aumentare della capacità di spostamento ( $u_{max}$ ). Generalmente, aumentare la capacità di spostamento di una struttura (soprattutto per strutture di grosse dimensioni) è molto complesso, dovuto soprattutto al fatto che la massima deformazione dei singoli elementi (e quindi di tutta la struttura) è regolato dalla normativa. Per i maschi murari sono previsti i seguenti spostamenti massimi:

$$\delta_u = 0.006 \cdot h \quad (\text{per rottura a flessione del maschio - esistenti}) \quad (13.a)$$

$$\delta_u = 0.004 \cdot h \quad (\text{per rottura a taglio del maschio}) \quad (13.b)$$

Una delle tecniche che si può seguire per aumentare la capacità di spostamento è quella di indurre tutti gli elementi a collassare per flessione (secondo le relazioni (13), per questo tipo di rottura è consentito uno spostamento maggiore).

Un'altra tecnica può essere quella di analizzare la rottura degli elementi che collassano e cercare di incrementarne la resistenza. In questo modo si richiede una forza alla base maggiore e quindi probabilmente uno spostamento maggiore.

Un modo per incrementare la capacità di spostamento può essere quello di consolidare gli elementi con FRP. Questa tecnica di consolidamento non altera le capacità di rigidità della struttura, ma solo quelle di resistenza. Inoltre, poiché si possono collocare elementi sia per incrementare la resistenza a flessione che quella a taglio, si può gestire il quantitativo in modo da pilotare la rottura per flessione e quindi, secondo le (13), un maggiore spostamento per i singoli elementi e di conseguenza una maggiore capacità di spostamento.

## 1.3 – Conclusioni

Nei precedenti punti si è discusso di come modificare i parametri ai fini di migliorare l'esito dell'analisi non lineare di una struttura in muratura. Per incrementare il numeratore della relazione (1) occorre incrementare la capacità di spostamento (vedi punto 1.2), mentre per far diminuire il denominatore occorre incrementare la rigidità e la resistenza del sistema bilineare equivalente (vedi punto 1.1).

In definitiva, a parità di  $m^*$  (si cerca sempre, per quanto possibile, non far diminuire la massa partecipante del primo modo del sistema), l'esito della verifica migliora quando:

- aumenta la capacità di spostamento ( $u_{max}$ );
- aumenta la rigidità del sistema bilineare equivalente ( $k^*$ );
- aumenta la resistenza del sistema bilineare equivalente ( $F^*_y$ ).

Se a seguito di un consolidamento si verificano tutte le tre precedenti condizioni, l'esito della verifica migliora sicuramente. Se si verificano alcune delle precedenti, affinché l'esito della verifica migliori, si deve verificare che il contributo migliorativo degli effetti benefici sia maggiore del contributo peggiorativo degli effetti negativi. In "a" di figura 3, a seguito del consolidamento, l'esito della verifica migliora sicuramente in quanto aumenta la capacità di spostamento ( $u^*_{max,c} > u^*_{max}$ ), aumenta la rigidità del sistema bilineare equivalente ( $k^*_c > k^*$ ) ed aumenta anche la resistenza del sistema ( $F^*_{y,c} > F^*_y$ ). In "b" della stessa figura non si sa se l'esito della verifica migliora o peggiora. In questo caso diminuisce la capacità di spostamento ( $u^*_{max,c} < u^*_{max}$ ), diminuisce la rigidità del sistema equivalente ( $k^*_c < k^*$ ) ed aumenta la resistenza del sistema ( $F^*_{y,c} > F^*_y$ ). L'esito della verifica migliora se l'effetto positivo dell'incremento della resistenza è maggiore degli effetti negativi della riduzione della rigidità e della capacità di spostamento.

Da valutare caso per caso il comportamento della struttura quando varia la massa partecipante del primo modo  $m^*$ . Come si è visto sopra, in molti casi, una riduzione di massa partecipante comporta un miglioramento dell'esito della verifica. Ad ogni modo, migliorare l'esito della verifica riducendo la massa partecipante non è una strada percorribile in quanto, più è alta la massa partecipante, meglio il metodo (analisi pushover uni-modale) funziona. In molti casi, per poter applicare il metodo viene richiesto un valore minimo per la massa partecipante pari al 75%. Per gli edifici in muratura, visto che non si hanno alternative di calcolo valide, si può andare in deroga.

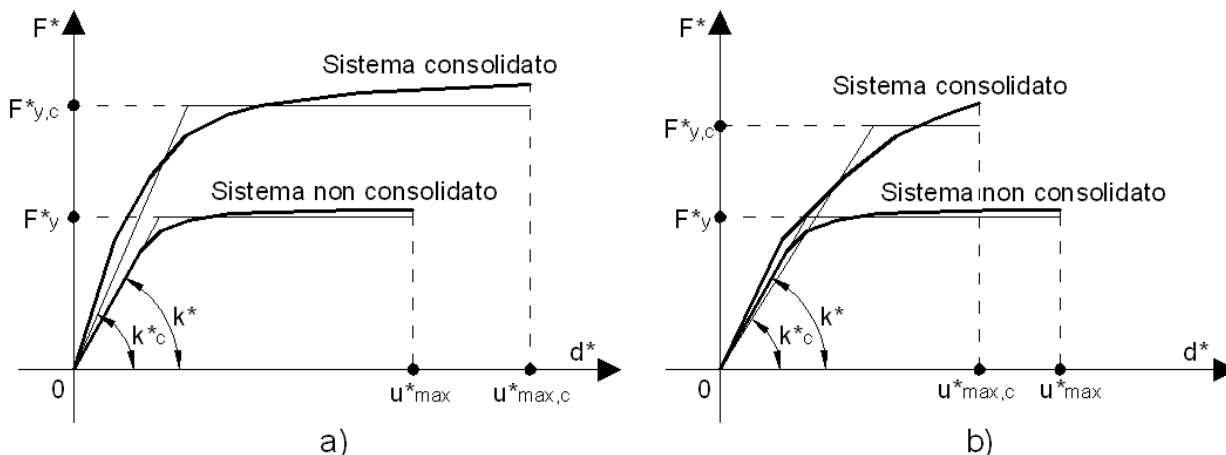


Figura 3 – a) Sistema efficacemente consolidato; b) Sistema con efficacia dubbia dei consolidamenti

### Esempio 1

Dato l'edificio scolastico riportato in figura 4 (si riporta a titolo di esempio la pianta del primo piano f.t.), si vuole consolidare in modo da ottenere un miglioramento sismico in termini di analisi globale.

### Dati

- Livello di conoscenza : LC1
- Suolo di fondazione : B
- Categoria topografica : T1
- Parametri sismici del sito ( $a_g = 0.259$ ;  $F_0 = 2.304$ ;  $T^*_c = 0.369$ )
- Muratura in *mattoni pieni e malta di calce*
- Spessore della muratura : 50 cm

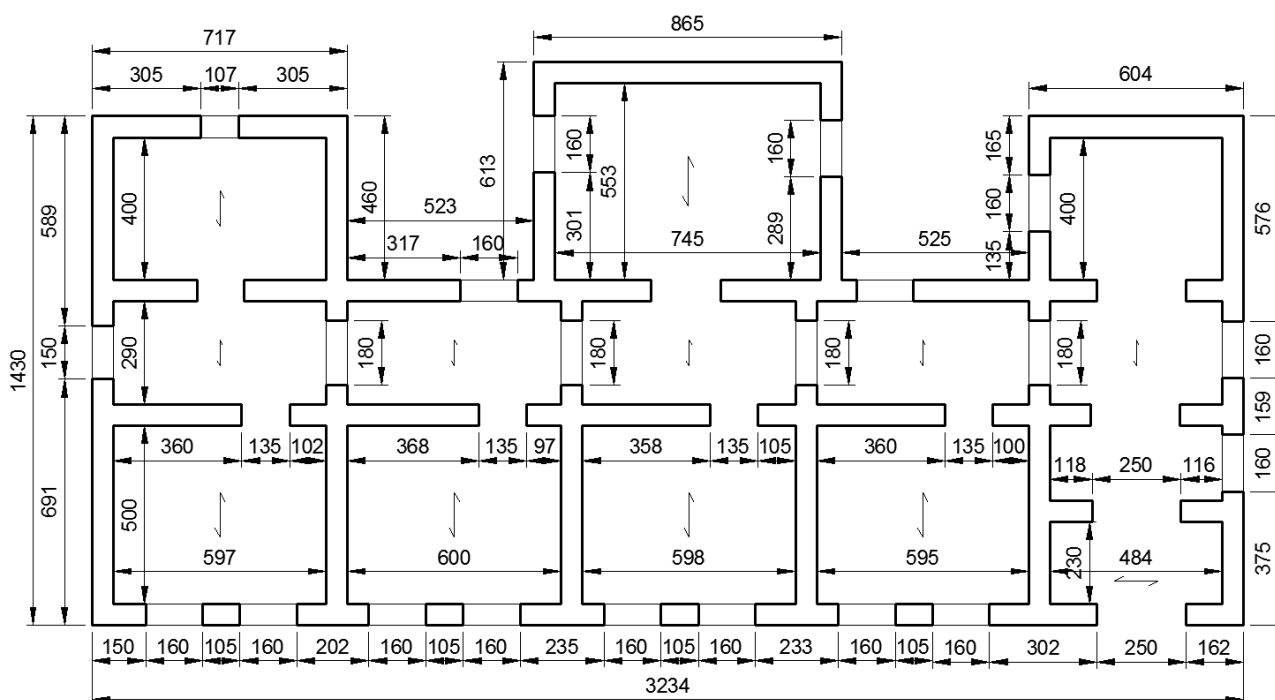


Figura 4 – Vista in pianta dell'edificio

### Risultati

Per le considerazioni che seguono occorre conoscere i parametri che definiscono lo spettro elastico per SLV. Dai dati si ottiene quanto riportato in tabella 1.

S	$T_B$ [cm/s <sup>2</sup> ]	$T_C$ [cm]	$T_D$ [cm]	$S_{e,max}$ [cm/s <sup>2</sup> ]
1.161	0.165	0.495	2.636	679.4

Tabella 1 – Parametri che definiscono lo spettro elastico

Effettuato il calcolo della struttura si ottengono i risultati riassunti nella tabella 2 (per il significato dei simboli si consulti la parte introduttiva del documento).

		$T^*$ [sec]	$k^*$ [daN/cm]	$m^*$ [daNm]	$m$ [daNm]	% m*/m	$F_y^*$ [daN]	$S_e(T^*)$	$F_{max}$ [daN]	$\Gamma$	$F_{max}^*$ [daN]	$q^*$	$u_{max}$ [cm]	$d_{max}$ [cm]	S
1	X (+) Masse	0.299	1108036	2511	3370	74.51	701201	679.4	875744	1.212	722378	2.433	1.842	2.586	0.71
2	X (-) Masse	0.299	1108032	2511	3370	74.51	695183	679.4	868536	1.212	716432	2.454	1.837	2.591	0.71
3	X (+) Altezze	0.323	948271	2511	3370	74.51	668787	679.4	854120	1.212	704542	2.551	1.643	2.885	0.57
4	X (-) Altezze	0.323	948246	2511	3370	74.51	662624	679.4	843309	1.212	695623	2.575	1.637	2.889	0.57
5	Y (+) Masse	0.307	1048476	2500	3370	74.18	675071	679.4	857724	1.214	706484	2.516	1.923	2.693	0.71
6	Y (-) Masse	0.307	1048164	2500	3370	74.18	677021	679.4	864932	1.214	712413	2.508	1.921	2.692	0.71
7	Y (+) Altezze	0.331	898261	2500	3370	74.18	627873	679.4	803666	1.214	661958	2.705	1.916	3.009	0.64
8	Y (-) Altezze	0.331	898164	2500	3370	74.18	643058	679.4	814478	1.214	670856	2.641	2.381	2.999	0.79

Tabella 2 – Risultati di calcolo dello stato di fatto

A titolo di esempio, si discutono le combinazioni 3 (X(+)-Altezze) e 8 (Y(-)-Altezze) delle quali si riportano i diagrammi in figura 5.

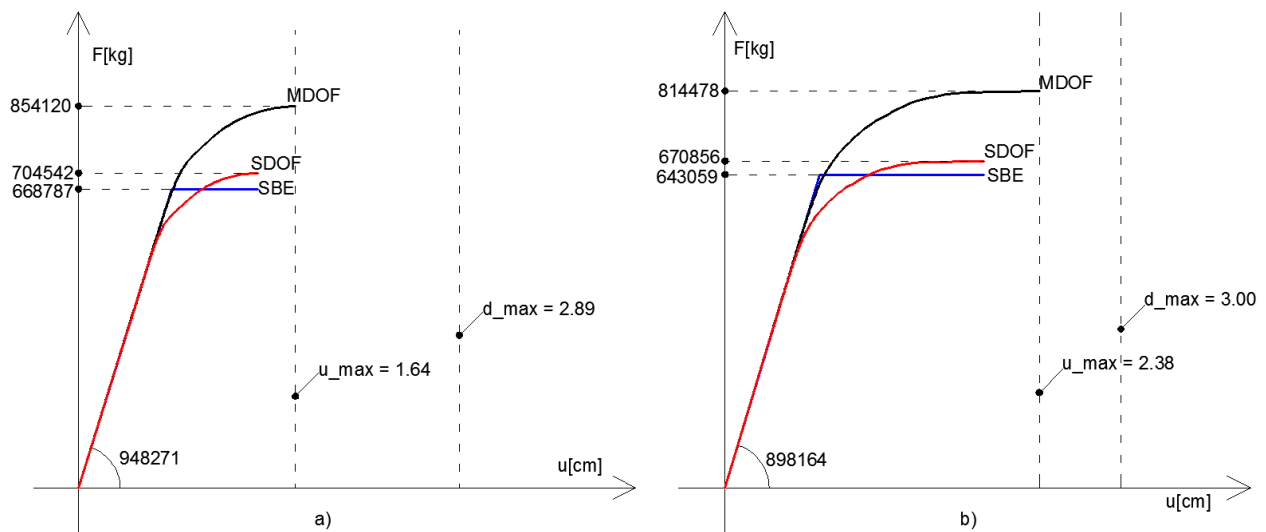


Figura 5 – a) Combinazione X(+)-Altezze; b) Combinazione Y(-)-Altezze;

Per entrambe le combinazioni di carico riportate nei grafici precedenti, l'esito della verifica è negativo (capacità di spostamento ( $u_{max}$ ) minore della domanda di spostamento ( $d_{max}$ )). Per migliorare l'esito della verifica occorre procedere con il consolidamento degli elementi.

Poiché si ha ( $T_B < T^* < T_C$ ), si prende in considerazione quanto riportato nel punto 1.1.2, per cui, occorre far aumentare sia la rigidezza ( $k^*$ ) che la resistenza ( $F_y^*$ ) del sistema equivalente. A tal proposito si procede con il consolidamento della struttura, intervenendo con intonaco armato su tutti gli elementi di cui è composta.

Si rielabora la struttura tenendo conto del consolidamento sopra citato. Nella tabella 3 si riassumo i risultati dell'analisi.

		T*	k*	m*	m	%	F <sub>y</sub> *	S <sub>e</sub> (T*)	F <sub>max</sub>	Γ	F <sub>max</sub> *	q*	u <sub>max</sub>	d <sub>max</sub>	S
		[sec]	[daN/cm]	[daNm]	[daNm]	m*/m	[daN]		[daN]		[daN]		[cm]	[cm]	
1	X (+) Masse	0.237	1882043	2684	3614	74.26	948091	679.4	1167259	1.217	959465	1.923	1.747	1.793	0.97
2	X (-) Masse	0.237	1882039	2684	3614	74.26	936055	679.4	1151799	1.217	946757	1.948	1.740	1.802	0.97
3	X (+) Altezze	0.257	1609013	2684	3614	74.26	907755	679.4	1120878	1.217	921341	2.009	1.604	2.022	0.79
4	X (-) Altezze	0.257	1609046	2684	3614	74.26	907124	679.4	1120878	1.217	921341	2.010	1.600	2.022	0.79
5	Y (+) Masse	0.242	1796262	2671	3614	73.90	917268	679.4	1144069	1.219	938833	1.978	1.782	1.866	0.95
6	Y (-) Masse	0.242	1794788	2671	3614	73.90	931010	679.4	1171124	1.219	961024	1.949	1.809	1.857	0.97
7	Y (+) Altezze	0.262	1536040	2671	3614	73.90	849876	679.4	1066767	1.219	875398	2.135	1.614	2.120	0.76
8	Y (-) Altezze	0.262	1534364	2671	3614	73.90	851340	679.4	1074497	1.219	881732	2.131	1.633	2.121	0.77

Tabella 3 – Risultati di calcolo struttura consolidata

Nella figura 6 si riportano sotto le curve sovrapposte (ante e post intervento) per le due combinazioni di carico prese in considerazione.

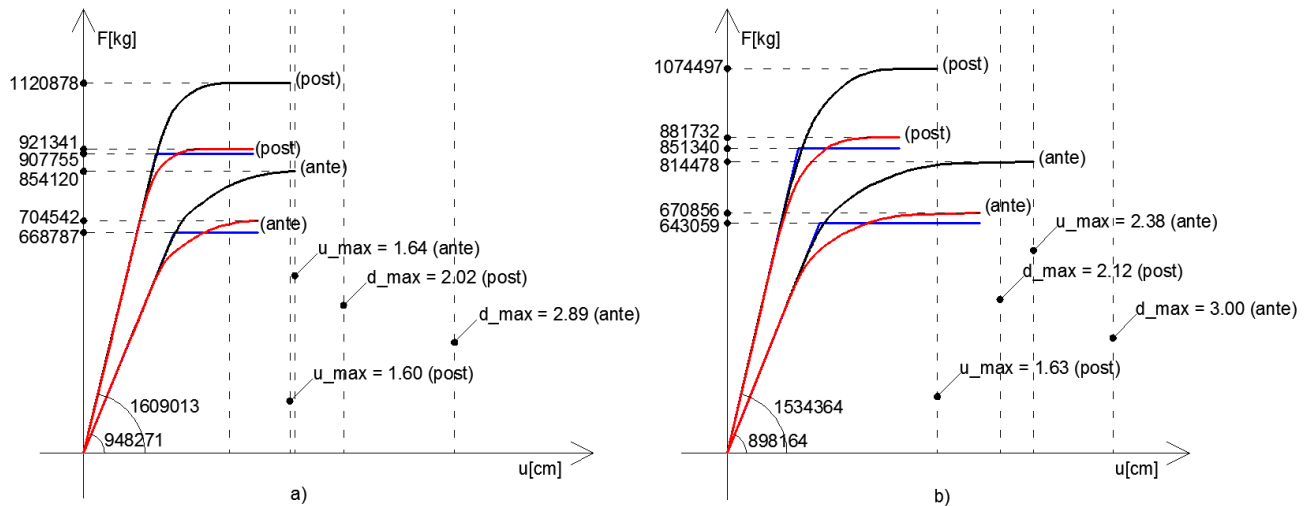


Figura 6 – a) Combinazione X(+)-Altezze; b) Combinazione Y(-)-Altezze;

Esaminando i risultati per sisma in direzione X ("a" di figura 6), si deduce che la capacità di spostamento si mantiene pressoché costante (passa dal valore 1.64 cm al valore 1.60 cm). Per questo parametro si ha una riduzione del coefficiente di sicurezza  $s$  trascurabile. Come visibile dai suddetti diagrammi, aumenta la resistenza del sistema equivalente  $F_{max}$  (passando dal valore 854120 kg al valore 1120878 kg) e la rigidità del sistema equivalente  $k^*$  (passando dal valore 948271 kg/cm al valore 1609013 kg/cm). Secondo quanto riportato nel punto 1.1, i suddetti incrementi dovrebbero migliorare anche l'esito della verifica. Tenendo conto che il periodo  $T^*$  è compreso tra  $T_B$  e  $T_C$ , la relazione con la quale calcolare la domanda di spostamento è la (3.b). Sostituendo i valori numerici si ottiene:

$$d_{max}^* = \frac{1.133}{2.009} \left[ 1 + (2.009 - 1) \cdot \frac{0.495}{0.2566} \right] = 1.66 \text{ cm}$$

$$d_{max} = 1.217 \cdot 1.66 = 2.02 \text{ cm}$$

La domanda di spostamento passa dal valore 2.89 al valore 2.02 cm (positivo ai fini della verifica). In definitiva si ha:

$$s = \frac{1.60}{2.02} = 0.79$$

Per questa combinazione di carico si passa da un valore del coefficiente di sicurezza di 0.57 ad uno di 0.79. L'esito della verifica migliora del 38.6%.

Si fa un ragionamento analogo per la combinazione di carico in direzione Y ("b" di figura 6). Da notare dai grafici che la capacità di spostamento subisce una riduzione (circostanza non rara per analisi non lineari), passando dal valore di 2.38 cm al valore di 1.63 cm (questo comporta una riduzione del numeratore della relazione (1)). Aumenta la resistenza del sistema equivalente (passando dal valore 643059 kg al valore 851340 kg) e la rigidezza (passando dal valore 898164 kg/cm al valore 1534364 kg/cm). Calcolando la domanda di spostamento si ottiene:

$$d_{\max}^* = \frac{1.183}{2.136} \left[ 1 + (2.136 - 1) \cdot \frac{0.495}{0.262} \right] = 1.74 \text{ cm}$$

$$d_{\max} = 1.219 \cdot 1.74 = 2.12 \text{ cm}$$

La domanda di spostamento passa dal valore 3.00 al valore 2.12 cm (positivo ai fini della verifica). In definitiva si ha:

$$s = \frac{1.63}{2.12} = 0.77$$

Confrontando il coefficiente di sicurezza sopra riportato con quello della struttura prima dell'intervento, si evince che l'esito della verifica è peggiorato (se pur di poco).

Lo scopo dell'esempio è stato quello di mettere in evidenza che, spesso un edificio calcolato secondo l'analisi statica non lineare, sottoposto a consolidamento, può restituire un esito della verifica peggiore rispetto a quello restituito in assenza di consolidamento.

#### **Software utilizzato**

[VEM<sub>NL</sub> – STACEC Srl](#)

#### **Bibliografia**

[Metodi di calcolo e tecniche di consolidamento per edifici in muratura – Michele Vinci – Dario Flaccovio Editore](#)